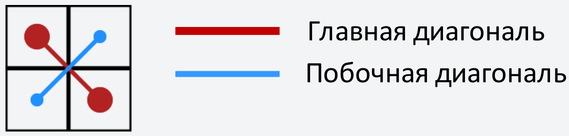
Пример вычисления определителя матрицы

Определитель матрицы — является многочленом от элементов квадратной матрицы (если элементы матрицы это числа, тогда определитель матрицы тоже будет числом).

Для нахождения определителя матрицы, исходная матрица должна быть квадратной.

Пример №1

Дана матрица размером 2x2;



$$\begin{pmatrix} -6 & -3 \\ -10 & -4 \end{pmatrix}$$

Что бы вычислить определитель матрицы 2x2 нужно из произведения элементов главной диагонали, вычесть произведение элементов побочной диагонали;

$$\begin{vmatrix} -6 & -3 \\ -10 & -4 \end{vmatrix} = -6 \cdot (-4) - (-3) \cdot (-10) = \mathbf{-6}$$

Ответ: -6

Пример №2

Дана матрица размером 3x3;

$$\begin{pmatrix} 7 & 4 & 9 \\ 0 & 6 & -3 \\ 4 & -10 & -4 \end{pmatrix}$$

Что бы вычислить определитель матрицы 3x3 нужно воспользоваться формулой;

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$$

$$\begin{pmatrix} 7 & 4 & 9 \\ 0 & 6 & -3 \\ 4 & -10 & -4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 7 & 4 & 9 \\ 0 & 6 & -3 \\ 4 & -10 & -4 \end{pmatrix}$$

Подставляем наши значения в формулу;

$$\begin{vmatrix} 7 & 4 & 9 \\ 0 & 6 & -3 \\ 4 & -10 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$= 7 \cdot 6 \cdot (-4) + 9 \cdot 0 \cdot (-10) + 4 \cdot 4 \cdot (-3) - 9 \cdot 6 \cdot 4 - 7 \cdot (-10) \cdot (-3) - 4 \cdot 0 \cdot (-4) = \mathbf{-642}$$

Ответ: -642

Пример №3

Дана матрица размером 4x4;

$$\begin{pmatrix} -4 & -2 & -7 & 8 \\ 2 & 7 & 4 & 9 \\ 2 & 0 & 6 & -3 \\ 6 & 4 & -10 & -4 \end{pmatrix}$$

Есть два способа вычисления определителя матрицы:

1. **По определению** - через разложение по строке или столбцу;
2. **По методу Гаусса** - приведение матрицы к треугольному виду (этот способ лучше использовать для решения матриц, размером 4x4 и более).

Решим пример первым способом (по определению - через разложение по строке или столбцу)

Чтобы вычислить определитель матрицы, нужно воспользоваться следующей формулой, в ней рассмотрен пример разложения матрицы по первой строке;

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} +$$

$$+a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

Итак, начнём

1. Выбираем строку или столбец (любую), лучше всего выбирать строку или столбец, где больше нулей, для удобства вычисления;
   В данном случае мы выбираем третью строку, так как в ней присутствует ноль;

$$\begin{pmatrix} -4 & -2 & -7 & 8 \\ 2 & 7 & 4 & 9 \\ 2 & 0 & 6 & -3 \\ 6 & 4 & -10 & -4 \end{pmatrix}$$

2. Берём первый элемент этой строки (2);
   Теперь вычёркиваем третью строку и первый столбец;

$$\begin{pmatrix} -4 & -2 & -7 & 8 \\ 2 & 7 & 4 & 9 \\ 2 & 0 & 6 & -3 \\ 6 & 4 & -10 & -4 \end{pmatrix}$$

Получаем матрицу 3x3;

$$\begin{pmatrix} -4 & -2 & -7 & 8 \\ 2 & 7 & 4 & 9 \\ \color{red}{2} & 0 & 6 & -3 \\ 6 & 4 & -10 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & -7 & 8 \\ 7 & 4 & 9 \\ 4 & -10 & -4 \end{pmatrix}$$

Согласно формуле, мы умножаем выбранный нами элемент на определитель получившейся матрицы;

Вычисление определителя матрицы 3x3, мы рассматривали в примере №2

$$\color{red}{2} \cdot \begin{vmatrix} -2 & -7 & 8 \\ 7 & 4 & 9 \\ 4 & -10 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$= \color{red}{2} \cdot ((-2) \cdot 4 \cdot (-4) + 7 \cdot 8 \cdot (-10) + (-7) \cdot 9 \cdot 4 - 8 \cdot 4 \cdot 4 - (-7) \cdot 7 \cdot (-4) - 9 \cdot (-10) \cdot (-2)) =$$

$$= \color{red}{2} \cdot (-1284) = \mathbf{-2568}$$

3. Далее делаем всё тоже самое, что и в шаге два, только берём второй элемент данной строки (0) и вычёркиваем третью строку и второй столбец;

$$\begin{pmatrix} -4 & -2 & -7 & 8 \\ 2 & 7 & 4 & 9 \\ 2 & \color{red}{0} & 6 & -3 \\ 6 & 4 & -10 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -4 & -7 & 8 \\ 2 & 4 & 9 \\ 6 & -10 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\color{red}{0} \cdot \begin{vmatrix} -4 & -7 & 8 \\ 2 & 4 & 9 \\ 6 & -10 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

Так как этот элемент равен нулю, то ни чего не нужно считать и так всё ясно;

4. Теперь берём третий элемент строки (6) и вычёркиваем третью строку и третий столбец;

$$\begin{pmatrix} -4 & -2 & -7 & 8 \\ 2 & 7 & 4 & 9 \\ 2 & 0 & \color{red}{6} & -3 \\ 6 & 4 & -10 & -4 \end{pmatrix}$$

Получаем матрицу 3x3;

$$\begin{pmatrix} -4 & -2 & -7 & 8 \\ 2 & 7 & 4 & 9 \\ 2 & 0 & \color{red}{6} & -3 \\ 6 & 4 & -10 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -4 & -2 & 8 \\ 2 & 7 & 9 \\ 6 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

Вычисляем определитель этой матрицы и умножаем на выбранный нами элемент (6)

$$6\cdot\begin{vmatrix}-4 & -2 & 8\\ 2 & 7 & 9\\ 6 & 4 & -4\end{vmatrix}=$$

$$=6\cdot\left((-4)\cdot7\cdot(-4)+2\cdot4\cdot8+(-2)\cdot9\cdot6-6\cdot7\cdot8-4\cdot9\cdot(-4)-2\cdot(-2)\cdot(-4)\right)=6\cdot(-140)=\mathbf{-840}$$

5. Берём четвёртый элемент строки (-3) и вычёркиваем третью строку и четвёртый столбец;

$$\begin{pmatrix}-4 & -2 & -7 & \cancel{8}\\ 2 & 7 & 4 & \cancel{9}\\ \cancel{2} & \cancel{0} & \cancel{6} & \cancel{-3}\\ 6 & 4 & -10 & \cancel{-4}\end{pmatrix}$$

Получаем матрицу 3x3;

$$\begin{pmatrix}-4 & -2 & -7 & \cancel{8}\\ 2 & 7 & 4 & \cancel{9}\\ \cancel{2} & \cancel{0} & \cancel{6} & \cancel{-3}\\ 6 & 4 & -10 & \cancel{-4}\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}-4 & -2 & -7\\ 2 & 7 & 4\\ 6 & 4 & -10\end{pmatrix}$$

Вычисляем определитель этой матрицы и умножаем на выбранный нами элемент (-3)

$$-3\cdot\begin{vmatrix}-4 & -2 & -7\\ 2 & 7 & 4\\ 6 & 4 & -10\end{vmatrix}=$$

$$=-3\cdot\left((-4)\cdot7\cdot(-10)+4\cdot(-2)\cdot6+2\cdot4\cdot(-7)-6\cdot7\cdot(-7)-4\cdot4\cdot(-4)-2\cdot(-2)\cdot(-10)\right)=-3\cdot(494)=$$

$$=\mathbf{-1482}$$

6. Чтобы вычислить определитель исходной матрицы, нужно сложить полученные результаты;

$$\begin{vmatrix}-4 & -2 & -7 & 8\\ 2 & 7 & 4 & 9\\ 2 & 0 & 6 & -3\\ 6 & 4 & -10 & -4\end{vmatrix}=-2568-0+(-840)-(-1482)=\mathbf{-1926}$$

Ответ: -1926

Опишем решение примера вторым способом (по методу Гаусса - приведение матрицы к треугольному виду)

Суть способа заключается в том, чтобы перед вычислением определителя, привести матрицу к треугольному виду. Если в ходе приведения матрицы к треугольному виду вы умножаете (делите) строку на число, то на это же число нужно будет умножить (разделить) полученный в конце определитель;

Пример приведения матрицы к треугольному виду мы уже рассматривали здесь

Итак, мы привили матрицу к треугольному виду;

$$\begin{pmatrix} -4 & -2 & -7 & 8 \\ 2 & 7 & 4 & 9 \\ 2 & 0 & 6 & -3 \\ 6 & 4 & -10 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -4 & -2 & -7 & 8 \\ 0 & 1 & -41/2 & 8 \\ 0 & 0 & -18 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 107/4 \end{pmatrix}$$

Теперь чтобы вычислить определитель приведённой матрицы, нужно перемножить все элементы, стоящие на главной диагонали;

$$\begin{vmatrix} -4 & -2 & -7 & 8 \\ 0 & 1 & -41/2 & 8 \\ 0 & 0 & 18 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 107/4 \end{vmatrix} = -4 \cdot 1 \cdot 18 \cdot \frac{107}{4} = -\mathbf{1926}$$

Ответ: -1926

Если Вам не понятен, какой либо шаг или у Вас есть вопросы по вычислению определителя матрицы, вы всегда можете оставить свой комментарий на нашем сайте или вычислить его, воспользовавшись нашим онлайн калькулятором.